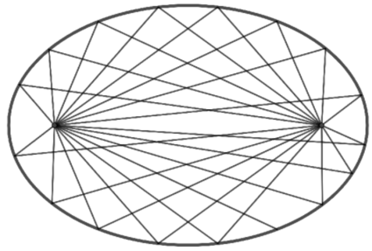
Inhaltsverzeichnis

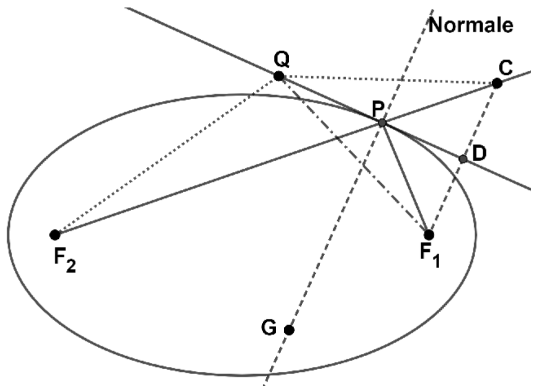
Reflexion von Brennstrahlen



Im Folgenden wird eine für Anwendungen sehr wichtige Eigenschaft von Ellipsen bewiesen. Sinngemäß lautet sie: Strahlen, die von einem Brennpunkt der Ellipse ausgehen, verlaufen nach der Reflexion an der Ellipsenlinie durch den anderen Brennpunkt. Diese Eigenschaft der Ellipse ist auch der Grund dafür, dass die beiden Punkte F_1 und F_2 einer Ellipse ***Brennpunkte*** genannt werden.

Etwas mathematischer formuliert:
Ellipsentangente und Ellipsennormale halbieren die Winkel zwischen den Brennstrahlen.

Beweis:



Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 und einem beliebigen Ellipsenpunkt P.
Die Strecke $\overline{F_2P}$ werde verlängert um $\overline{F_1P}$ bis C.
Die Strecke $\overline{F_2C}$ besitzt damit die Länge 2a.
Das Dreieck F_1PC ist gleichschenklig.
Der Punkt D liege auf der Grundseite $\overline{F_1C}$ dieses Dreiecks, so dass die Gerade DP die Mittelsenkrechte des Dreiecks F_1PC bildet. Diese Gerade DP halbiert damit den Nebenwinkel von $\measuredangle F_2PF_1$.

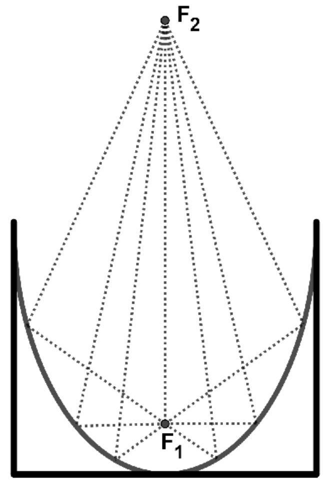
Für jeden beliebigen Punkt Q auf der Mittelsenkrechten DP gilt $\overline{QC} = \overline{QF_1}$.
Somit ist $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QC} + \overline{QF_2} > 2a$ für $Q \neq P$. Der Punkt P auf der Geraden DP ist also der einzige Ellipsenpunkt, alle anderen Punkte Q auf der Geraden DP liegen außerhalb der Ellipse. Die Gerade DP ist also Ellipsentangente.

Es gelten folgende Winkelidentitäten: $\measuredangle F_2PQ = \measuredangle CPD$ (Scheitelwinkel) und $\measuredangle CPD = \measuredangle F_1PD$. Also folgt $\measuredangle F_2PQ = \measuredangle F_1PD$.

Weiter folgt $\measuredangle F_2PQ + \measuredangle F_2PG = 90°$ und $\measuredangle F_1PG + \measuredangle F_1PD = 90°$ weil die Gerade PG die Normale zur Tangente ist.
Weil $\measuredangle F_2PQ = \measuredangle F_1PD$ folgt insgesamt auch $\measuredangle F_2PG = \measuredangle F_1PG$

q.e.d.

2. Nierenlithotripter



Das Prinzip der Schallfokussierung wird heute zur Zertrümmerung von Nierensteinen mit Stoßwellen verwendet. Der *Nierenlithotripter* ist ein Rotationsellipsoid, in dessen einem Brennpunkt F_1 (außerhalb des menschlichen Körpers) Ultraschallwellen erzeugt werden. Mit diesen zertrümmert man Nierensteine, die sich im anderen Brennpunkt F_2 (innerhalb des Körpers) befinden. Dazu ist also kein chirurgischer Eingriff notwendig.

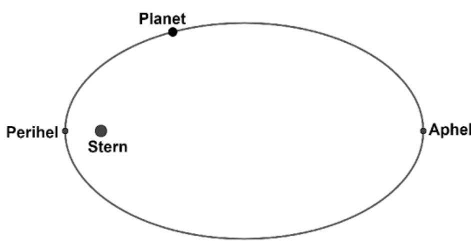
3. Optische Laser

Optische Laser funktionieren im Prinzip so: Mit UV-Licht werden in einem Kristall sehr viele Elektronen in ein höheres Energieniveau gepumpt. Von dort fallen sie alle möglichst gleichzeitig in ihren Grundzustand zurück, wobei sie die gewünschte Laserstrahlung emittieren. Die Leistung des Lasers hängt natürlich davon ab, wie viele Elektronen man energetisch anheben kann. Deshalb wird innerhalb eines Rotationsellipsoides die Pumplichtquelle in einem Brennpunkt positioniert und der Laserkristall in dem anderen Brennpunkt.

4. Ofen

Die Reflexionseigenschaft von Ellipsen wird auch in speziellen Öfen eingesetzt. Das Heizelement befindet sich in einem Brennpunkt eines Ellipsoiden, die zu erhitzende Probe im anderen. Die vom Heizelement ausgehende Wärmestrahlung wird an der Wand zur Probe zurückgeworfen. Der Vorteil ist die ziemlich gleichmäßige Erwärmung der Probe, da diese von allen Seiten bestrahlt wird.

5. Planetenbewegung



Planeten, welche ihren Stern störungsfrei (d.h. ohne Gravitationseinfluss von anderen Planeten) umlaufen, bewegen sich auf einer Ellipsenbahn, wobei der Stern in einem der beiden Brennpunkte liegt. Dies ist die Aussage des ersten *Keplerschen Gesetzes*. Als *Perihel* bezeichnet man den sternennächsten Punkt, als *Aphel* den sternenfernsten Punkt. Die meisten Planeten in unserem Sonnensystem bewegen sich nahezu kreisförmig um unsere Sonne. Ausnahmen bilden da insbesondere der Planet Merkur und der Zwergplanet Pluto.

Aufgaben

1. Gegeben sei die Ellipse E: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Gib die Gleichung dieser Ellipse als polare Brennpunktsgleichung in der Form $\mathbf{r}(\varphi)=\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{1+\varepsilon\cdot\cos\varphi}}$ an!

2. Gegeben sei eine Ellipse E durch folgende polare Brennpunktsgleichung:
$72=r\cdot(1+0{,}8\cdot\cos\varphi)$
Gib die Gleichung der Ellipse in kartesischen Koordinaten in 1. Hauptlage an!

3. Eine Ellipse besitzt den Parameter (*semi-latus rectum*) p = 3,2 und die Fläche A = 20π. Ermittle daraus die Halbachsen a und b!

4. Die polare Brennpunktsgleichung einer Ellipse $r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos\varphi}$ liefert $r(\pi)=10$ und $r\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right)=6$. Berechne p und ε !

5. Gegeben ist eine Ellipse durch $r(\varphi)=\frac{5}{1+0{,}5\cdot\cos\varphi}$. Gib die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten in 1. Hauptlage an!

Lösungen

1. $3{,}2=r\cdot(1+0{,}6\cdot\cos\varphi)$

2. Aus p=72 und ε=0,8 folgt schnell a=200 und b=120, E: $\frac{x^2}{40000}+\frac{y^2}{14400}=1$

3. $p=\frac{b^2}{a}$ und $A=ab\pi$

$\Longrightarrow\quad p\cdot A=b^3\cdot\pi\quad\Longrightarrow\quad b=\sqrt[3]{\frac{p\cdot A}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3{,}2\cdot 20\pi}{\pi}}=\sqrt[3]{64}=4$

$a=\frac{A}{b\cdot\pi}=\frac{20\pi}{4\pi}=5$

4. Einsetzen in die Gleichung $p=r\cdot(1+\varepsilon\cdot\cos\varphi)$ liefert
$p=10\cdot(1+\varepsilon\cdot(-1))$ und $p=6\cdot(1+\varepsilon\cdot\frac{-1}{2})$
Hieraus folgt nach kurzer Rechnung $\varepsilon=\frac{4}{7}$ und $p=\frac{30}{7}$

5. $a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}=\frac{5}{1-0{,}25}=\frac{20}{3}$ und $b=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{5}{\sqrt{1-0{,}25}}=\frac{5}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{10}{\sqrt{3}}$

Damit lautet die Ellipsengleichung E: $\frac{9x^2}{400}+\frac{3y^2}{100}=1$

Parameterdarstellung

Man kann reelle Funktionen (wenn eine Funktionsgleichung bekannt ist) auch vektoriell in sog. Parameterform angeben. Betrachte etwa folgende Beispiele:

Beispiel 1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ für $t \in [-1; 1]$. Die y-Koordinate kann hier nicht negativ werden. Wenn man alle erlaubten Werte für t einsetzt, erhält man also einen Halbkreis mit dem Radius r = 1, denn $x^2 + y^2 = t^2 + (1 - t^2) = 1$

Denselben Halbkreis erhält man z.B. mit folgender Parameterform:
Beispiel 2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ \sqrt{1-t^6} \end{pmatrix}$ für $t \in [-1; 1]$

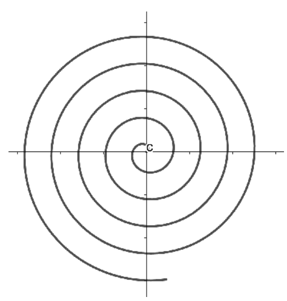
Hieran erkennt man, dass es für denselben Funktionsgraphen durchaus unterschiedliche Parameterformen gibt.

Die folgende Parameterform liefert sogar den kompletten Einheitskreis (also keine Funktion, sondern eine Relation):
Beispiel 3: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $t \in [0; 2\pi)$

Für denselben Vollkreis könnte man auch folgende Darstellung benutzen:
Beispiel 4: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ für $t \in [0; 2\pi)$

In physikalischen Anwendungen bedeutet der Parameter t fast immer die Zeit. Wenn zu jeder Zeit t der Ort $\vec{r}(t)$ eines Objektes bekannt ist, dann kann man natürlich durch zeitliche Ableitung sehr leicht die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ dieses Objektes berechnen. Aber dies soll hier nicht weiter vertieft werden. Die unterschiedlichen Darstellungen der obigen Halb- oder Vollkreise bewirken, dass diese Kurven mit unterschiedlichen Anfangspunkten, teils in unterschiedliche Richtungen und unterschiedlich schnell (falls t die Bedeutung einer Zeit hätte) durchlaufen werden.

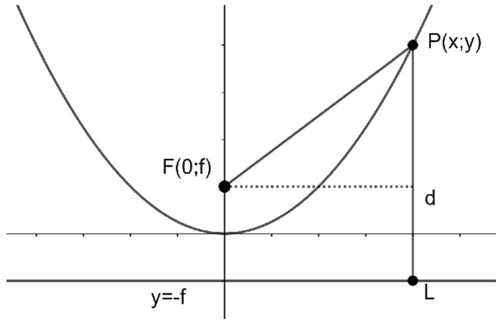
Man kann jede reelle Funktionsgleichung in eine derartige Parameterform überführen durch $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$



Zusätzlich lassen sich jedoch auch viele Relationen durch eine Parameterform darstellen. Betrachte dazu etwa folgende Spirale: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

Parabel

Definition:
Eine Parabel ist der Ort aller in einer Ebene E liegenden Punkte P, die von einer sog. Leitgeraden und einem sog. Brennpunkt F den gleichen Abstand besitzen.



Damit hat die Parabel im Gegensatz zur Ellipse oder Hyperbel nur einen einzigen Brennpunkt.

Um für eine Parabel im kartesischen Koordinatensystem eine mathematische Gleichung herzuleiten, gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass der Brennpunkt auf der y-Achse liegen soll und die Leitlinie parallel zur x-Achse liegt. Die dazu passende Parabelgleichung ist sehr einfach herzuleiten. Wir wählen willkürlich als Brennpunkt F(0; f) und als Leitlinie g: $y = -f$, wobei f eine positive reelle Zahl sein soll und Brennweite genannt wird.
Es sollte klar sein, dass der Ursprung (0; 0) als Mittelpunkt zwischen F und der Leitgeraden ein Punkt der gesuchten Parabel ist.

Laut Definition der Parabel und laut Skizze gilt also:

$$\overline{PF} = d$$

$$\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = y + f$$

$$x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2fy + f^2 = y^2 + 2fy + f^2$$

$$x^2 = 4fy$$

$$\mathbf{y = \frac{1}{4f} \cdot x^2}$$

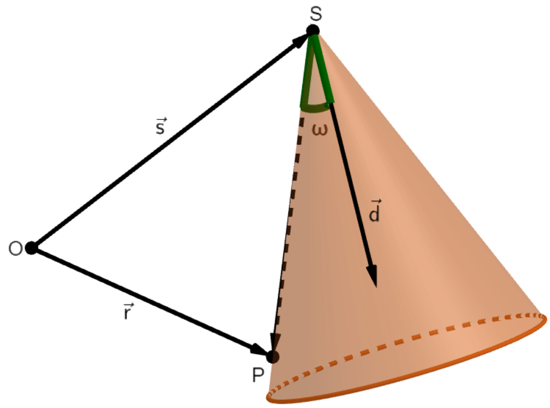
Dabei gilt: Brennpunkt ist $F(0; f)$ und Leitgerade ist g: $y = -f$.

Diese Form der Parabelgleichung nennt man ***Scheitelpunktsgleichung***. Die Parabel ist hier natürlich symmetrisch zur y-Achse. Der Schnittpunkt der Parabel mit ihrer Achse wird Scheitelpunkt genannt. Der Scheitelpunkt ist hier offensichtlich der Ursprung. Der Abstand zwischen Brennpunkt und Scheitelpunkt beträgt f.
Bemerkenswert ist auch, dass eine Parabel (im Gegensatz zu Hyperbeln) keine Asymptoten besitzt.

Die Kegelschnitte

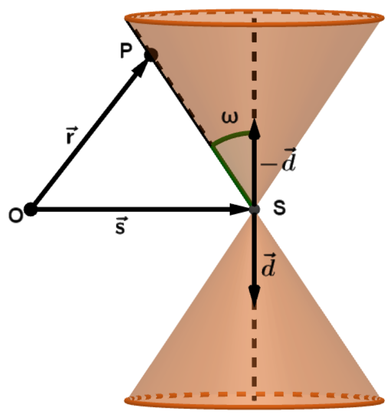
Der Doppelkegel

Die Lage eines Kegels im Raum wird eindeutig festgelegt durch die Koordinaten der Kegelspitze S, durch einen Vektor $\vec{d}$ in Richtung seiner Symmetrieachse und durch seinen Öffnungswinkel. Mit ω bezeichnet man im Allgemeinen den halben Öffnungswinkel.



Für alle Punkte P auf dem Kegelmantel gilt:
$(\vec{r}-\vec{s})\cdot\vec{d} = |\vec{r}-\vec{s}|\cdot d\cdot\cos\omega$

Da man mit Beträgen von Vektoren ungern rechnet (wegen der Wurzelfunktion), bietet es sich an, diese Gleichung zu quadrieren. Allerdings erhält man beim Quadrieren einer Gleichung üblicherweise weitere Lösungen. Das ist auch hier der Fall: Man denke sich alle Mantellinien über die Kegelspitze S hinaus verlängert. Dann erhält man einen sog. Doppelkegel.
Für einen beliebigen Punkt in der oberen Hälfte des Doppelkegels gilt dann folgende Gleichung:
$(\vec{r}-\vec{s})\cdot(-\vec{d}) = |\vec{r}-\vec{s}|\cdot d\cdot\cos\omega$



Diese Gleichung unterscheidet sich von der vorvorherigen nur durch ein einziges Vorzeichen. Durch Quadrieren der Gleichungen verschwindet das unterschiedliche Vorzeichen und man erhält eine neue Gleichung, die für den gesamten Doppelkegel gilt:

$\left[(\vec{r}-\vec{s})\cdot\vec{d}\right]^2 = |\vec{r}-\vec{s}|^2\cdot d^2\cdot\cos^2\omega$
Die Betragsstriche verschwinden dann auch:
$\left[(\vec{r}-\vec{s})\cdot\vec{d}\right]^2 = (\vec{r}-\vec{s})^2\cdot d^2\cdot\cos^2\omega$

Üblicherweise wählt man den Achsenrichtungsvektor $\vec{d}$ als Einheitsvektor, also d=1. Damit folgt vereinfacht weiter für einen Doppelkegel:

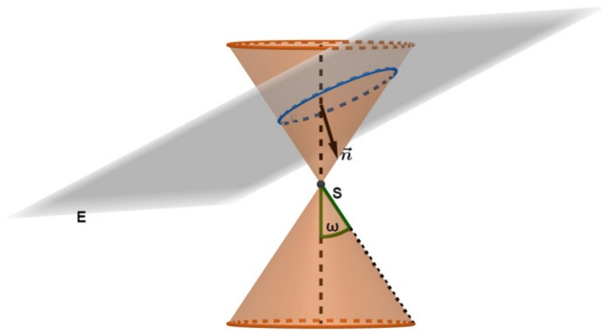
$\boldsymbol{\left[(\vec{r}-\vec{s})\cdot\vec{d}\right]^2 = (\vec{r}-\vec{s})^2\cdot\cos^2\omega}$ wobei $\vec{d}$ ein Einheitsvektor ist.

Im Folgenden betrachten wir den Schnitt einer Ebene mit einem Doppelkegel. Das Schnittgebilde ist relativ uninteressant, wenn die Ebene durch die Spitze S des Kegels verläuft. Der Vollständigkeit halber werden die drei Möglichkeiten dafür trotzdem kurz erwähnt:

Fall 1: Die Schnittmenge enthält nur einen einzigen Punkt, nämlich die Spitze S des Kegels.
Fall 2: Die Ebene „berührt“ den Doppelkegel entlang einer einzigen Mantellinie. Die Schnittmenge ist dann eine Gerade
Fall 3: Die Ebene schneidet den Doppelkegel in zwei durch die Spitze S verlaufenden Geraden. Der Winkel zwischen diesen beiden Geraden liegt zwischen 0° und dem Öffnungswinkel 2ω des Doppelkegels. Letzteres wäre der Fall, wenn die Kegelachse ebenfalls in der Ebene E liegen würde.

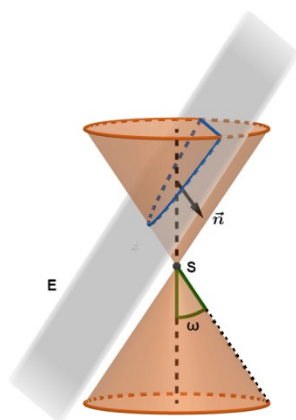
Wesentlich interessanter sind die Fälle, in denen die Ebene E nicht durch die Kegelspitze verläuft. Auch hier gibt es drei bzw. vier unterschiedliche Möglichkeiten.

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ für eine Ebene E kann immer so gewählt werden, dass der Winkel β zwischen diesem Normalenvektor $\vec{n}$ und der Kegelachse grundsätzlich zwischen 0° und 90° liegt.



Das Schnittgebilde zwischen der Ebene E und dem Kegel hängt von der Größe dieses Winkels β und von der Größe des halben Öffnungswinkels ω des Kegels ab.

Für β = 0° (dann wäre der Normalenvektor $\vec{n}$ parallel zur Kegelachse) ergibt sich offensichtlich als Schnitt ein Kreis.



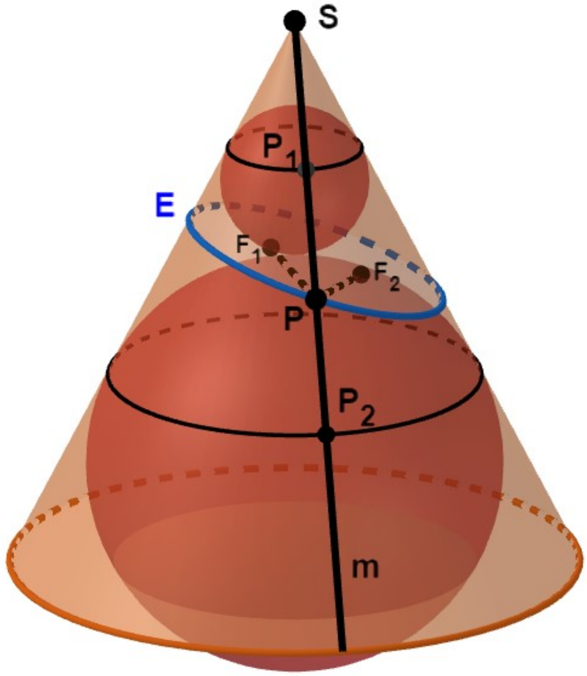
Die folgenden Aussagen müssen anschließend natürlich noch bewiesen werden!

Für $0° < \beta < \omega$ wird sich eine Ellipse ergeben.

Für $\beta = \omega$ wird sich eine Parabel ergeben.

Sowohl der Schnittkreis als auch die Ellipse und die Parabel liegen nur in einer der beiden Doppelkegelhälften.

Kegelschnitt Ellipse



In der nebenstehenden Zeichnung wird dargestellt, wie eine Ebene E einen Kegel so schneidet, dass als Schnittgebilde mit dem Kegelmantel etwas Eiförmiges oder Ovales oder, wie wir gleich beweisen werden, eine Ellipse entsteht.
Für den Beweis benötigen wir sog. *Dandelinsche Kugeln* (*Germinal Pierre Dandelin, 1794 – 1847*).

Man kann sich das so vorstellen, als würde innerhalb des Kegels ein kugelförmiger Luftballon so weit aufgeblasen, bis er sowohl den Kegelmantel in einem Berührkreis als auch die Schnittebene E in einem Berührpunkt F berührt.
Die obere *Dandelinsche Kugel* liege zwischen der Spitze S des Kegels und der Schnittebene, die untere Kugel liege unterhalb der Schnittebene.

Die beiden Berührpunkte der zwei Kugeln mit der Schnittebene E nennen wir jetzt schon F_1 und F_2, weil sich gleich zeigen wird, dass diese beiden Punkte die Brennpunkte der Schnittellipse sein werden.

Nun zum Beweis, dass das Schnittgebilde zwischen dem Kegelmantel und der Ebene E eine Ellipse sein wird:

Es sei P ein beliebiger Punkt auf diesem Schnittgebilde. *m* sei die Mantellinie, die von der Kegelspitze S durch P gezogen wird. *m* trifft die beiden Berührkreise in den Punkten P_1 und P_2.

Sowohl $\overline{PF_2}$ als auch $\overline{PP_2}$ sind Strecken, die auf Tangenten an die untere Kugel liegen. Da die Tangentenabschnitte von einem beliebigen, außerhalb der Kugel auf der Tangente liegenden Punkt bis zum Berührpunkt mit der Kugel alle gleich lang sind, ist $\overline{PF_2} = \overline{PP_2}$.
Ebenso folgt, dass $\overline{PF_1} = \overline{PP_1}$ sein muss.
Damit folgt: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = \overline{P_1P_2}$.

Quadriken

Unter dem Begriff ***Quadrik*** versteht man die Lösungsmenge einer allgemeinen quadratischen Gleichung mit n Variablen. In diesem Buch werden wir uns allerdings nur mit quadratischen Gleichungen mit 2 Variablen beschäftigen. Als Beispiel betrachte man etwa: $3x^2 + 4xy - 5y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit zwei Variablen. Sie enthält zwei *rein-quadratische* Terme, nämlich $3x^2$ und $5y^2$, den sog. *gemischt-quadratischen* Term $4xy$, den *linearen* Term $6x - 8y$ und den *konstanten* Term 9.

Man kann beweisen, dass sich alle Kegelschnitte durch eine allgemeine quadratische Gleichung mit zwei Variablen darstellen lassen. Das Umgekehrte gilt allerdings nicht: Nicht jede derartige Gleichung entspricht einem Kegelschnitt. Beispiele dafür werden weiter unten aufgeführt.

Wenn man untersuchen will, was genau eine quadratische Gleichung darstellt, so ist es hilfreich, diese Gleichung mit Hilfe einer Matrix $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ darzustellen.

Obige quadratische Gleichung kann man entweder in der Form (Skalarprodukt zweier Vektoren)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

oder in reiner Matrizenschreibweise in der folgenden Form

$$(x \quad y \quad 1) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (x \quad y \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

darstellen.

Etwas umgeformt folgt in beiden Darstellungen:

$$m_{11}x^2 + (m_{12} + m_{21})xy + m_{22}y^2 + (m_{13} + m_{31})x + (m_{23} + m_{32})y + m_{33} = 0$$

Möchte man die Beispielsgleichung $3x^2 + 4xy - 5y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ derart darstellen, so folgt offensichtlich, dass $m_{11} = 3$, $m_{12} + m_{21} = 4$, $m_{22} = -5$, $m_{13} + m_{31} = 6$, $m_{23} + m_{32} = -8$, $m_{33} = 9$

Für die 9 Elemente der Matrix M gibt es nur 6 Bedingungen. Für mehrere dieser Elemente gibt es offensichtlich unendlich viele Lösungen. Deshalb gibt es auch unendlich viele passende Matrizen M für diese Gleichung.